

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

I. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \dots\dots\dots 1p$

(M, \cdot) este grup $\Rightarrow \{A, A^2, A^3, A^4 = I_2\} \subset M \Rightarrow M = \{A, A^2, A^3, A^4 = I_2\} \dots\dots\dots 1p$

Obține $\begin{cases} B = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ C = A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{cases}$ sau $\begin{cases} B = A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ C = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \dots\dots\dots 1p$

Arată că $M = \{I_2, A, B, C\}$ cu $B = A^2$ și $C = A^3$ este grup față de înmulțire.....2p

Total 7 puncte

II. a) $\sum_{k=1}^n x_k = \frac{5n}{n+1} \dots\dots\dots 1p$

$1+2+\dots+n \leq \sum_{k=1}^n x_k \leq 2+3+\dots+(n+1) \dots\dots\dots 1p$

$\frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{5n}{n+1} \leq \frac{n(n+3)}{2} \dots\dots\dots 1p$

Rezultă că $n=2 \dots\dots\dots 1p$

b) $P(X) = 3X^2 - 10X + a_2, x_1 \in [1, 2], x_2 \in [2, 3]$

$\begin{cases} P(1) \cdot P(2) \leq 0 \\ P(2) \cdot P(3) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_2 - 7)(a_2 - 8) \leq 0 \\ (a_2 - 8)(a_2 - 3) \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

$a_2 \in \{7, 8\}, P(X) = 3X^2 - 10X + 7$ sau $P(X) = 3X^2 - 10X + 8 \dots\dots\dots 1p$

Total 7 puncte

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

- III.** a) $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$ 1p
 $F(e^2) = 0 \Rightarrow C = 0$ 1p
b) $F'(x) = f(x) \geq 0, \forall x \in [1, \infty)$ 2p
c) $A = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 8 - 2\sqrt{e} - \frac{6}{\sqrt{e}}$ 3p

Total 7 puncte

- IV.** a) $\int_1^2 [f(x^2) - (x+1)]^2 dx = 0$ 4p
b) $f(x^2) = (x+1), \forall x \in [1, 2]$ 2p
Cu $x^2 = t \in [1, 4] \Rightarrow f(t) = 1 + \sqrt{t}$ 1p

Total 7 puncte